BIBLIOGRAFIA:
Lipchutz, Seymour, Álgebra lineal, Serie de compendios Schaum, 1971
espacios vectoriales y subespacios, pagina 74, ejercicio 4.17
editorial Mc Graw-Hill

EJERCICIO

QUE ME DAN:

1) W esta formado por las matrices simetricas, esto es todas las matrices $A = (a_{\mathrm{ij}})$, tales que $a_{\mathrm{ji}=}a_{\mathrm{ij}}$;
2) W esta formado por todas las matrices que conmutan con una matriz dada C. esto es, $W = \{A \epsilon V; \mathrm{AC} = \mathrm{CA}\}$

QUE ME PIDEN:
Sea V el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $n \times n$ sobre un cuerpo K, mostrar que W es un espacio de V teniendo en cuenta las condiciones anteriores.

PLAN DE SOLUCION:

primero demostraremos que W es un espacio de V, teniendo en cuenta que se toman todas las matrices cuadradas $n \times n$ y la condicion numero 1, la cual nos dice que: W esta formado por las matrices simetricas, esto es todas las matrices A=(a_{ij}) tales que $a_{\mathrm{ji}} = a_{\mathrm{ij}}$;

posteriormente, demostraremos lo que nos piden pero en la condicion 2: W esta formado por todas las matrices que conmutan con una matriz dada C; esto es:
$W = \{A \epsilon V; \mathrm{AC} = \mathrm{CA}\}$ en la cual tendremos que demostrar que se cumple para algunas propiedades que se encuentran en la suma usual de matrices y del producto clasico entre matrcies.

SOLUCION

primero demostraremos que W es un espacio de V, en donde V es el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $n \times n$

1) entonces tenemos que: $V = A_{n \times n}$; a_{ji}=a_{ij}

donde: $\oplus$ es la suma de matrices clasica y $\odot$ es el producto clasico entre matrices y escalares.
es: $\{\mathrm{V}, \oplus, \odot\}$ un espacio vectorial?
Sean A_{nxn} ϵ V y B_{nxn} ϵ V
se cumple $A_{n \times n}$ $+ B_{n \times n}$ ϵ V?

entonces: $A_{n \times n}$ + $B_{n \times n}$= $[a_{\mathrm{ij}} + b_{\mathrm{ij}}] = [a_{\mathrm{ji}} + b_{\mathrm{ji}}]$
lo cual se deduce por la simetria de A y B.

2) ahora procedemos a demostrar que W es un espacio de V, donde V es el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $n \times n$ sobre un cuerpo K, teniendo en cuenta que W esta formado por todas las matrices que conmutan con una matriz dada C.

ahora tenemos que A y B ϵ V

es decir:

AC = CA (la cual sera la ecuacion 1) y

BC=CB (ecuacion 2)

es $A \oplus B$ una matriz que conmuta con C, es decir: $A \oplus B \in V$

debo probar que:

$(A \oplus B)C = C(A \oplus B)$

entonces sumando la ecuacion 1 y la ecuacion2

$AC \oplus BC =$ CA+CB

$(A+B)C = C(A+B)$ {factorizando C en la izquierda y en la derecha
luego $A \oplus B \in V$.

ahora probaremos la propiedad con la conmutativa es directa puesto que si $A \in V$, $B \in V$ entonces:
$A \oplus B = B \oplus A$
ya que la suma es la usual y esta es conmutativa.

la existencia del cero, tambien es directa pues:

0C=C0=0.

tambien existe -A $\in$ V
si A $\in$V.
AC=CA

multiplicando por -1 a ambos lados:

$(-1)\,AC = (-1)CA$
(-A)C=C(-A)

pues el escalar se puede cambiar de orden en el producto de matriz.